הרצאה מספר 2
אלגברה 1 מ 104016
הנושא: שדות ומספרים מרוכבים

דר. נתן ולך

הטכניון – הפקולטה למתמטיקה

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.7 מה חסר ב־ $\mathbb{Q}$?

- $\mathbb{Q}$ הוא שדה.
- נחפש פתרון למשוואה $x^2 = 2$.
- $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$
- <u>טענה:</u> $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

<u>הוכחה:</u> נניח כי $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$ הוא שבר מצומצם. כלומר $\frac{m^2}{n^2} = 2$.
אזי $m^2 = 2n^2$. ולכן m חייב להיות מספר זוגי .
נרשום $m = 2a$. נציב: $2n^2 = m^2 = (2a)^2 = 4a^2$.
נחלק כל אגף ב־ 2 ונקבל: $n^2 = 2a^2$. ולכן גם n חייב להיות מספר זוגי .
אבל, זאת אומרת ש־ 2 מחלק גם את m וגם את n.
בכך קיבלנו סתירה להנחה שהשבר $\frac{m}{n}$ הוא מצומצם.
אין מספר $q \in \mathbb{Q}$ המקיים $q^2 = 2$. $\square$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.8 המספרים הממשיים

הגדרה: המספרים הממשיים $\mathbb{R}$

היא קבוצה של המספרים שמודדים אורך של קטע מתוך ישר (הממשיים החיוביים),
וכן הנגדיים של מספרים אלו.

- $\sqrt{2}, e, \pi, \ldots \in \mathbb{R}$
- הגדרה מתמטית מדויקת היא ענין מסובך.
- ניתן להעזר ברעיון של הכתיב העשרוני. לכל מספר ממשי יש תיאור בכתיב העשרוני.
- 0 הוא האורך של "נקודה", למשל הקטע $[3,3]$.
- פעולות החשבון הרגילות מקיימות את התכונות.
- $\mathbb{R}$ הוא שדה.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.8 המספרים הממשיים

הגדרה: המספרים הממשיים $\mathbb{R}$

היא קבוצה של המספרים שמודדים אורך של קטע מתוך ישר (הממשיים החיוביים),
וכן הנגדיים של מספרים אלו.

- $\mathbb{R}$ הוא שדה.
- מה עדיין חסר לנו?
- נחפש פתרון למשוואה $x^2 = -1$.
- מכיון ש־ $a^2 \geq 0$ לכל מספר ממשי, אין פתרון ב־ $\mathbb{R}$.
- לכן נרצה להכיר את $\mathbb{C}$, אוסף ממספרים המרוכבים .

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.10 מוטיבציה למספרים המרוכבים

- מה עדיין חסר לנו ב־ $\mathbb{R}$? $x^2 = -1.$
- באו ונגדיר מספר חדש i המקיים $i^2 = -1$.
  ל־ i קוראים היחידה המדומה (imaginary unit).
- גם המספר $-i$ הוא שורש של $p(x) = x^2 + 1$.
- הבחירה מי הוא i ומי הוא $-i$ היא בחירה שרירותית.
- כמו שניתן לכפול את 1 (היחידה הכפלית) במספרים ממשים, ולקבל כל מספר ממשי,
  מן הראוי להגדיר את המספרים $bi = b \cdot i$ לכל $b \in \mathbb{R}$.
  $(bi)^2 = b^2 i^2 = -b^2$ קבלנו פתרון של $x^2 = -b^2$
- המספר bi נקרא מדומה טהור (pure imaginary).
- איזו מספר הוא גם ממשי וגם מדומה טהור? $0 = 0 + 0i = 0i$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.11 הגדרת המספרים המרוכבים

- אז איך נחבר בין מספר ממשי a מספר מדומה טהור bi?
  נגדיר $(a)+(bi)=(a+bi)$.
- <u>הגדרה:</u> המספרים המרוכבים : $\mathbb{C}=\left\{\ a+bi\ :\ a,b\in\mathbb{R}\ \right\}$
- למה "מרוכב" (complex)?
  כי יש כאן הרכבה של חלק ממשי וחלק מדומה.
- למה "מדומה" (imaginary)?
  כי הם לא יכולים "למדוד אורך" (ושטח) כמו מספר "ממשי".
- הגדרת שיוון:

$$\left(a+bi\right)=\left(c+di\right)\quad\Longleftrightarrow\quad a=c,\ \ b=d$$

- על מנת לקבל שדה, צריך להגדיר חיבור וכפל, ולבדוק את התנאים.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.12 חיבור של מספרים המרוכבים

הגדרה: חיבור של מספרים מרוכבים :

$$z_1 + z_2 = \left(a + bi\right) + \left(c + di\right)$$
$$= \left(a + c\right) + \left(b + d\right) i$$

התוצאה מספר מרוכב (סגירות)

החלק הממשי:

$$\mathrm{Re}\left(a + bi\right) = a$$
$$\mathrm{Re}\left(c + di\right) = c$$
$$\mathrm{Re}\left(z_1 + z_2\right) = a + c$$

החלק המדומה:

$$\mathrm{Im}\left(a + bi\right) = b$$
$$\mathrm{Im}\left(c + di\right) = d$$
$$\mathrm{Im}\left(z_1 + z_2\right) = b + d$$

ה־ i לא מופיע בצד ימין

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.12 חיבור של מספרים המרוכבים

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= \left(a + bi\right) + \left(c + di\right) \\
&= \left(a + c\right) + \left(b + d\right) i \\
&= \left(c + a\right) + \left(d + b\right) i \\
&= \left(c + di\right) + \left(a + bi\right) = z_2 + z_1
\end{aligned}
$$

מסקנה: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ **חילוף מתקיים**

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.12 חיבור של מספרים המרוכבים

$$
\begin{aligned}
(z_1+z_2)+z_3 &= \Big(\big(a+bi\big)+\big(c+di\big)\Big)+\big(e+fi\big)\\
&= \Big(\big(a+c\big)+\big(b+d\big)i\Big)+\big(e+fi\big)\\
&= \Big(\underbrace{\big(a+c\big)+e}_{\text{קיבוץ ב־ }\mathbb{R}}\Big)+\Big(\underbrace{\big(b+d\big)+f}_{\text{קיבוץ ב־ }\mathbb{R}}\Big)i\\
&= \Big(a+\big(c+e\big)\Big)+\Big(b+\big(d+f\big)\Big)i\\
&= \big(a+bi\big)+\Big(\big(c+di\big)+\big(e+fi\big)\Big) = z_1+(z_2+z_3)
\end{aligned}
$$

מסקנה: $(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$ קיבוץ מתקיים

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.12 חיבור של מספרים המרוכבים

- **איבר האדיש לחיבור (אפס):** $0_{\mathbb{C}} = 0 + 0i$
- **בדיקה:**

$$z + 0_{\mathbb{C}} = \Big(a + bi\Big) + \Big(0 + 0i\Big) = \Big(a + 0\Big) + \Big(b + 0\Big)\, i = \Big(a + bi\Big) = z$$

- **הנגדי**

$$z = \Big(a + bi\Big) \iff -z = \Big((-a) + (-b)i\Big) = \Big(-a - bi\Big)$$

- **בדיקה:**

$$\Big(a + bi\Big) + \Big((-a) + (-b)i\Big) = \Big(a + (-a)\Big) + \Big(b + (-b)\Big)\, i = \Big(0 + 0i\Big) = 0$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.13 כפל של מספרים המרוכבים

<u>מוטיבציה</u>: נבצע חישוב רעיוני, כאשר נרשה פעולות שנראות סבירות.

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= \Big(a + bi\Big) \cdot \Big(c + di\Big) \\
&= a\Big(c + di\Big) + bi\Big(c + di\Big) \\
&= a\Big(c\Big) + a\Big(di\Big) + bi\Big(c\Big) + bi\Big(di\Big) \\
&= ac + ad\ i + bc\ i + bd\ i^2 \\
&= ac + (ad + bc)i + bd\ (-1) \\
&= (ac - bd) + (ad + bc)i
\end{aligned}
$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.13 כפל של מספרים המרוכבים

הגדרה: כפל של מספרים מרוכבים :

$$z_1 \cdot z_2 = \left(a + bi\right) \cdot \left(c + di\right) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

סגירות: מתקיים

חילוף: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

$$z_2 \cdot z_1 = \left(c + di\right) \cdot \left(a + bi\right) = (ca - db) + (cb + da)i$$

$$z_2 \cdot z_1 = (ac - bd) + (ad + bc)i = z_1 \cdot z_2$$

איבר אדיש לכפל (היחידה): $1_{\mathbb{C}} = 1 + 0i$

$$(1+0i) \cdot z_2 = \left(1 + 0i\right) \cdot \left(c + di\right) = (1c - 0d) + (1d + 0c)i = c + di = z_2$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.13 כפל של מספרים המרוכבים

קיבוץ: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

$$
\begin{aligned}
(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 &= \Big(\big(a + bi\big) \cdot \big(c + di\big) \Big) \cdot \big(e + fi\big) \\
&\vdots \\
&= \big(a + bi\big) \cdot \Big(\big(c + di\big) \cdot \big(e + fi\big) \Big) \\
&= z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)
\end{aligned}
$$

לבדוק בבית. חישוב טכני, פיתוח ארוך:

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = (ace - bde - adf - bcf) + (acf - bdf + ade + bce)\, i$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.13 כפל של מספרים המרוכבים

חישוב:

$$
\begin{aligned}
z \cdot z^{-1} &= (a+bi)\cdot\left(\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)i\right)\\
&= \left(\frac{a\cdot a}{a^2+b^2}-\frac{b\cdot(-b)}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{a(-b)}{a^2+b^2}+\frac{b(a)}{a^2+b^2}\right)i\\
&= 1+0i=1_{\mathbb{C}}
\end{aligned}
$$

הגדרה: **ההופכי** : בהנחה ש־ $z=(a+bi)\neq 0$

$$z^{-1}=\left(a+bi\right)^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)i$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.14 פילוג במרוכבים

פילוג מתקיים

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= \big(a + bi\big) \cdot \Big(\big(c + di\big) + \big(e + fi\big) \Big) \\
&= \big(a + bi\big) \cdot \Big(\big(c + e\big) + \big(d + f\big)\, i \Big) \\
&= \Big(a\big(c + e\big) - b\big(d + f\big) \Big) + \Big(a\big(d + f\big) + b\big(c + e\big) \Big)\, i \\
&= \Big(\big(ac - bd\big) + \big(ae - bf\big) \Big) + \Big(\big(ad + bc\big) + \big(af + be\big) \Big)\, i \\
&= \Big(\big(ac - bd\big) + \big(ad + bc\big)\, i \Big) + \Big(\big(ae - bf\big) + \big(af + be\big)\, i \Big) \\
&= \qquad z_1 \cdot z_2 \qquad + \qquad z_1 \cdot z_3
\end{aligned}
$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.15 המישור המרוכב והמודול

- כידוע ניתן לצייר את הנקודה (a, b) במישור הרגיל כנקודה שנמצא

ציור בלוח

  - a יחידות מרחק "ימינה" (בכיוון ציר x) מהראשית.
  - b יחידות מרחק "למעלה" (בכיוון ציר y) מהראשית.

- באופן דומה, נצייר את הנקודה $z = a + bi$ **במישור המרוכב** באותו מקום, אך נקרא לצירים
  - **הציר הממשי** (אופקי)
  - **הציר המדומה** (אנכי).

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.15 המישור המרוכב והמודול

- נחשב את הסכום של $z = 4 + 3i$ ו־ $w = -2 - i$:
  ציור בלוח

$$z + w = 2 + 2i$$

ונגלה שהחיבור הוא חיבור של וקטורים:

$$(4, 3) + (-2, -1) = (2, 2)$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.15 המישור המרוכב והמודול

- במישור הממשי, המרחק של הנקודה (a,b) מהראשית, כלומר אורך הוקטור מהראשית לנקודה (a,b) היא $\sqrt{a^2+b^2}$.
- <u>הגדרה:</u> למספר מרוכב $z=a+bi$ המודול (ערך מוחלט) הוא $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.
- דוגמה: $z=4+3i$.

$$|z|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

- המרחק מהראשית יתפקד כרדיוס כאשר נטפל בצורה הטריגנומטרית של המרוכבים, שדומה לקואורדינטות מעגליות (פולריות).
- כמובן, שכדי לדבר על כך, נצטרך להתיחס גם לזוית. נחזור לזה בהמשך.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

1.15 המישור המרוכב והמודול

שאלה: מתי מתקיים $z^2 = |z|^2$?

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ z^2 &= (a+bi)^2 = (a^2 - b^2) + (2ab)i \\ |z|^2 &= a^2 + b^2 \qquad \text{(מספר ממשי)} \end{aligned}$$

לכן צריך לדרוש

- שיוון של החלק המדומה, כלומר $2ab = 0$, ולכן או $a = 0$ או $b = 0$.
- שיוון של החלק הממשי, כלומר $a^2 - b^2 = a^2 + b^2$, ולכן $b^2 = 0$ ובעצם $b = 0$.

מסקנה: צריך לדרוש ש־ $b = 0$ ולכן המשוואה תקיפה רק ל"מספר ממשי" (מספר ב־ $\mathbb{C}$ מהצורה $a + 0i$).

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות